Istituto di Psicologia della Università Cattolica del S. C. di Milano
(diretto dal Prof. A. GEMELLI)

DOTT. ALESSANDRO GATTI

Sull'apprezzamento del centro in alcune figure piane geometriche

(con 8 figure)

Scopo della ricerca. - La presente ricerca, incominciata nell'Istituto psicologico dell'Ateneo torinese e condotta a termine in quello dell'Università Cattolica di Milano, venne eseguita con lo scopo di stabilire, se la posizione del centro geometrico di una figura piana coincida con quella soggettivamente giudicata tale, e, ove risulti una differenza, di determinare a quanto essa ammonti e se varii col variare della grandezza della figura prescelta. A tal fine esaminai triangoli equilateri, quadrati e cerchi.

Ordinamento delle esperienze e metodo usato. - La figura disegnata, senza l'indicazione del centro, colla massima esattezza, viene ricoperta da un foglio di carta trasparente, bianca, sul quale è segnato un punto. Il soggetto ha il compito di spostare il foglio di carta trasparente sinchè il punto, su essa disegnato, coincide, a giudizio suo, col centro. Lo sperimentatore allora o il soggetto stesso, fissa sul foglio di carta trasparente, con una matita, due vertici, trattandosi di triangoli e quadrati, tre punti della circonferenza, trattandosi di cerchi.

Per determinare l'entità dell'errore, segnato il centro sulla figura presentata, si fanno coincidere coi vertici i punti corrispondenti della carta trasparente e si fissa con la matita il centro geometrico. La distanza tra il punto così stabilito e quello segnato sulla carta trasparente, e la loro posizione relativa, ci danno l'entità e la direzione dell'errore commesso.

Gli spostamenti vengono eseguiti in due sensi. Presentata al soggetto una figura, per esempio un quadrato, si pone il foglietto di carta trasparente una prima volta in modo che il punto si trovi sul lato superiore ed il soggetto debba eseguire gli spostamenti

Digitized by Google

dall'alto verso il basso; una seconda volta sul lato inferiore, dimodochè gli spostamenti si abbiano a fare dal basso verso l' alto. Ciò per evitare gli errori di spazio e di tempo.

Per quanto gli spostamenti vengano eseguiti senza alcun ausilio meccanico, si raggiunge, dopo alcune esperienze preliminari, una esattezza del tutto sufficiente, come appare d' altronde dai risultati ottenuti. S'intende che lo spessore delle linee di contorno e il diametro del punto centrale debbono rimanere costanti, e che i punti di riferimento vanno segnati con matita finemente appuntita. Le misure vengono eseguite con l' ausilio di una lente da orologiaio e di un doppio decimetro di precisione.

Questo metodo, sebbene conduca ad errore di metodo di circa due decimi di millimetro, non potendosi eseguire a mano spostamenti minori, e sebbene la carta trasparente scemi il chiarore del contorno della figura, s'avvantaggia tuttavia di una grande semplicità e s'avvicina alla pratica di chi segna il centro di una figura.

Disegnai serie di dieci triangoli equilateri (da 10 a 100 mm. di lato), di dieci quadrati (da 10 a 100 mm. di lato), di dieci cerchi (da 10 a 100 mm. di raggio) in nero su fogli di cartoncino bianco, aventi le dimensioni 29 × 17 cm. circa. Lo spessore delle linee di contorno era di circa 0,5 mm. per le figure maggiori, di circa 0,25 mm. per le minori.

Su foglietti di carta trasparente bianca privi di imperfezioni, aventi le dimensioni di circa 13 × 13 cm. (ed anche più per le figure maggiori) segnai un punto circolare, spostato alquanto rispetto al centro del foglietto, di 0,5 mm. di diametro. Io stesso compii le esperienze definitive, le quali vennero eseguite monocularmente, e cioè con l' occhio destro, sempre alla stessa luce, sul medesimo tavolo (ricoperto da un grande foglio di cartoncino bianco) e sotto le migliori condizioni fisiche. Nessuna determinazione venne fatta durante uno stato di stanchezza. Le misure vennero eseguite (nel modo indicato) dopo aver sperimentato su una serie completa di figure.

Il metodo seguito si può dire dell'errore medio, secondo quanto su di esso scrivono il Fechner (1), il Wundt (2) ed il Müller (3),

(1) G. Th. Fechner, *Elemente der Psychophysik,* 2ª ed. (Wundt) I, pp. 120 e segg., 1889. *Revision der Hauptpunkte der Psychophysik,* pp. 104 e segg., 1882.

(2) W. Wundt, *Grundzüge der physiolog. Psychologie* I 6, pp. 595 e segg. 1908.

(3) G. E. Müller, *Die Gesichtspunkte u. die Tatsachen der psychophysischen Methodik,* pp. 190 e segg., 1904. Nella nomenclatura seguo il Müller.

Digitized by Google

ove si consideri la posizione geometricamente esatta del centro come stimolo normale. In tal caso la differenza tra questa posizione e quella soggettivamente determinata dà senz'altro il singolo errore commesso. La media dei singoli errori rappresenta l'errore costante medio *(F)*. Le differenze tra questo ed i singoli errori costituiscono i singoli errori variabili ($\triangle$), la media dei quali ($\triangle m$), ricavata secondo la formula (1):

$$\triangle m = \frac{\Sigma \triangle}{\sqrt{n\,(n-1)}}$$

(dove n significa il numero delle singole determinazioni), rappresenta l'errore medio variabile.

Per decidere se l'errore costante medio *(F)* sia dovuto a cause accidentali od a una causa costante ho calcolato l'errore probabile w, secondo la formula (2):

$$w = \frac{0{,}8453\ \Sigma \triangle}{n\sqrt{n - 0{,}42921}}$$

Si potrebbe obbiettare che per ricavare il valore medio F il numero delle determinazioni sia troppo esiguo, ma il piccolo valore di w mi giustificò a ritenerle sufficienti. Ricavai F dalla media aritmetica dei due singoli valori ottenuti, facendo la media delle determinazioni eseguite con spostamenti dall'alto verso il basso e dal basso l'alto, e ciò perchè i due valori non differiscono molto fra di loro (3).

Per vedere se il valore F varii con la grandezza delle figure presentate, lo divisi per il lato delle medesime, le quali, secondo la grandezza dei lati ordinai in serie aritmetica in cui i termini stanno fra di loro come 1: 2: 3: 4:.....; chiamo il valore così ottenuto *errore medio relativo.*

Feci tutti i calcoli, come fu già detto, dopo aver finite le esperienze su tutte le serie di una figura. In breve: adottai tutte le precauzioni consigliate in ricerche analoghe. Ciò detto, ecco i risultati per le varie figure.

(1) G. E. Müller, *op. cit.*, p. 192.
(2) *Ibidem*, p. 193.
(3) Wundt, *op. cit.*, p. 597.

Digitized by Google

Risultati ottenuti nei triangoli. - L'errore si commette sempre *verso l'alto*, rispetto alla posizione del centro geometrico. Questo fatto non subì mai eccezione alcuna, neppure nelle esperienze preliminari ed in quelle fatte con altri soggetti. Talvolta il centro soggettivo è spostato lievemente verso destra, non mai a sinistra, generalmente sulla mediana verticale.

La tabella I dà i risultati e cioè i singoli errori commessi nelle dieci determinazioni per ognuno dei dieci triangoli. Le dieci determinazioni, contrassegnate con numeri romani, sono disposte in modo che quelle dall' I al V indicano i risultati ottenuti con spostamenti dall'alto verso il basso, e viceversa dal VI al X, in ordine di esecuzione per modo che venne eseguita la I e poi la VI, quindi la II e poi la VII, e via dicendo. I valori indicati in questa e nelle altre tabelle sono espressi in millimetri.

TABELLA I.

Determinazioni	*10* mm.	*20* mm.	*30* mm.	*40* mm.	*50* mm.	*60* mm.	*70* mm.	*80* mm.	*90* mm.	*100* mm.
I	0,60	1,00	1,20	1,50	2,00	2,80	2,50	3,00	3,75	3,75
II	0,50	0,75	1,50	1,25	2,75	2,50	2,50	3,75	5,00	5,00
III	0,50	1,00	1,00	1,50	1,80	2,00	2,75	3,50	3,60	4,50
IV	0,25	0,90	1,25	1,60	2,75	2,50	3,50	3,00	2,50	4,50
V	0,25	1,20	1,00	1,80	3,00	2,75	2,50	3,25	4,25	4,25
VI	0,00	0,75	0,75	1,25	1,75	2,50	2,50	2,60	3,75	4,25
VII	0,00	0,75	1,00	1,40	1,25	2,75	3,00	3,00	3,50	3,75
VIII	0,20	0,75	1,20	1,50	2,00	2,60	2,75	3,40	4,00	3,50
IX	0,40	0,75	0,80	1,80	2,25	2,75	2,50	3,40	3,50	4,00
X	0,00	0,75	1,00	1,40	2,00	2,50	2,50	2,60	3,50	4,25

Nella tabella II sono raccolte le medie dei singoli errori, l'errore medio variabile, l'errore probabile, l'errore costante relativo, espresso in numeri decimali ed in frazione unitaria. *Fo* significa la media aritmetica dei singoli errori, ottenuti con spostamenti dall'alto al basso, *Fu* il viceversa, *F* l'errore costante medio, ottenuto dalla media aritmetica di *Fo* e *Fu*, $\triangle m$ l'errore medio variabile, *w* l'errore probabile di *F*, $\frac{F}{l}$ l'errore costante medio relativo al lato.

Digitized by Google

TABELLA II.

Figura presentata	*Fo*	*Fu*	*F*	$\triangle m$	*w*	$\frac{F}{l}$	$\frac{F}{l}$
Triang. 10 mm.	0,42	0,12	0,270	0,1940	0,0500	0,0270	$\frac{1}{37,04}$
» 20 »	0,97	0,75	0,860	0,1391	0,0361	0,0430	$\frac{1}{23,26}$
» 30 »	1,19	0,95	1,070	0,1834	0,0475	0,0357	$\frac{1}{28,01}$
» 40 »	1,53	1,47	1,500	0,1476	0,0383	0,0375	$\frac{1}{26,67}$
» 50 »	2,35	1,96	2,155	0,2456	0,0637	0,0431	$\frac{1}{23,20}$
» 60 »	2,51	2,62	2,565	0,1739	0,0451	0,0428	$\frac{1}{23,39}$
» 70 »	2,75	2,65	2,700	0,2530	0,0656	0,0386	$\frac{1}{25,93}$
» 80 »	3,30	3,00	3,150	0,3268	0,0847	0,0394	$\frac{1}{25,40}$
» 90 »	3,82	3,65	3,735	0,4375	0,1134	0,0415	$\frac{1}{24,10}$
» 100 »	4,40	3,95	4,175	0,3584	0,0929	0,0418	$\frac{1}{23,95}$

Dall'esame dei risultati esposti nella tabella II osserviamo anzitutto che *Fo* è superiore ad *Fu*, se si eccettua il triangolo di 60 mm. di lato. Tuttavia la differenza tra i due valori è piccola. Perciò ricavai *F* come negli altri casi dalla media aritmetica (1).

Risulta inoltre che l'errore *F* aumenta proporzionalmente alla grandezza dei lati dei triangoli esaminati, così che l'errore relativo

(1) Potrebbe fare eccezione il valore di *F* per il triangolo di 10 mm. di lato, valore che, ricavato con la media aritmetica, è uguale a 0,27, con la media geometrica a 0,3089, avvicinandosi di più all'andamento degli altri *F*. Nel triangolo di 20 mm., mentre nella tabella II ho dato il valore di *F* dedotto dalla media aritmetica di *Fo* e *Fu*, nelle curve si deve, a parer mio, considerare il solo *Fu*, in cui l'errore medio variabile è uguale a zero. Operando in tal modo ci si avvicina ad una maggiore uniformità. Infatti, i risultati per il triangolo di 20 mm. divengono allora: $F = 0,75, \Delta m = 0, w = 0, \frac{F}{l} = 0,0375 = \frac{1}{24,67}$, anzichè $F = 0,86$, $\Delta m = 0,1391$, $w = 0,0361$, $\frac{F}{l} = 0,043 = \frac{1}{23,26}$. Mi pare che l'andamento delle curve degli $\frac{F}{l}$ e degli *F* giustifichi il mio operato.

Digitized by Google

ai lati dovrebbe essere uguale ad una costante. Infatti, se riduciamo gli errori relativi, commessi per i triangoli da 20 a 100 mm. di lato, alla seconda cifra decimale, otteniamo una costante uguale a *0,04.* Da questa media si scostano più o meno i singoli valori, come è manifesto dalla figura *1*, nella quale sulla linea d'ascissa, alla distanza di 15 mm., sono portate le grandezze dei lati nella loro successione: le rispettive ordinate corrispondono ai valori di $\frac{F}{l}$ (ridotti alla seconda cifra decimale), per modo che ad ogni unità della seconda cifra decimale corrispondono 2 mm. Come ho già detto, (cfr. nota pag. 231) i valori di $\frac{F}{l}$ per i triangoli di 10 e 20 mm. di lato sono considerati qui uguali a 0,03089 e 0,0375. S'aggiunga che per la pubblicazione la figura 1 venne ridotta a due terzi.

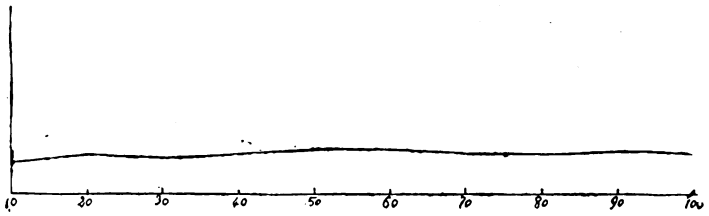

Fig. 1

Se ora noi supponiamo l'errore che si commette nel determinare il centro del triangolo di 1 mm. di lato uguale ad *a*, l'errore di un qualsivoglia altro triangolo di *n* mm. di lato sarà uguale a

$$F = (a.\ n) \pm k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

ove *k* rappresenta un errore variabile di volta in volta. L'errore commesso nel triangolo di *1* mm. di lato è uguale altresì all'errore di un qualsivoglia triangolo diviso per il corrispondente lato:

$$a = \frac{F \pm k}{n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

L'errore *a* ottenuto in tal modo è quello che io chiamo errore costante relativo al lato, il cui valore medio è uguale a 0,04; e poichè rappresenta nel tempo stesso l'errore che si commetterebbe in un triangolo di *1* mm. di lato, per mezzo dell'equazione *1*) possiamo calcolare i valori dei singoli *F*, quali dovrebbero essere,

Digitized by Google

essendo valida la legge di proporzionalità, secondo le varie determinazioni. Nella tabella III sono messi a confronto i valori di *F* risultanti dal calcolo e quelli ottenuti sperimentalmente, come pure la differenza *k*, per i triangoli da *20* a *100* mm. di lato.

TABELLA III.

Lati dei triangoli	*F ottenuto per calcolo*	*F ottenuto sperimt.*	*k*
20 mm.	0,80	0,75	— 0,05
30 »	1,20	1,07	— 0,13
40 »	1,60	1,60	0,00
50 »	2,00	2,155	+ 0,155
60 »	2,40	2,565	+ 0,165
70 »	2,80	2,70	— 0,10
80 »	3,20	3,15	— 0,05
90 »	3,60	3,735	+ 0,135
100 »	4,00	4,175	+ 0,175

Che valore attribuire a *k*? L'errore medio variabile $\triangle m$ più che l'espressione di una causa d'errore valevole per tutte le determinazioni di una serie, rappresenta, a parer mio, l' indice di quelle cause perturbatrici che di volta in volta intervengono. L'errore probabile che è funzione di $\triangle m$ indica la probabilità di errore della media, dato un certo $\triangle m$. *k* invece, che rappresenta gli scarti dei singoli errori costanti medii, indica piuttosto un errore legato alle determinazioni eseguite o dall'alto verso il basso o dal basso verso l'alto e, con la successione dei segni, le oscillazioni di quest'errore.

Se poi osserviamo che nei singoli triangoli *k* è ora minore ora maggiore, a seconda si consideri *Fo* o *Fu*, senza dimostrare alcuna determinata tendenza; se osserviamo che *k* è spesso negativo, vale a dire che non raggiunge quel valore che si ottiene per mezzo di calcoli basati sulle medie, si deduce che oltre alla causa predominante dell'errore costante, ve n'è un'altra che agisce in senso contrario ad essa e che a seconda delle oscillazioni dell' attenzione ha maggiore o minore influenza o non ne ha alcuna.

Digitized by Google

L'errore costante che si commette determinando il centro di un triangolo è dovuto a più cause: l'una consiste nella nota illusione del triangolo equilatero, per la quale questo è visto come isoscele; la seconda nel sovrapprezzamento della metà superiore delle figure. Ed inoltre, siccome il centro di un triangolo equilatero dista in modo eguale dai tre vertici, si ha che il vettore verticale appare maggiore che non i vettori laterali (*fig. 2*). Nella costruzione del centro quest'illusione influisce nel senso che, cercando di eguagliare i tre vettori apparentemente diseguali, si deve spostare il centro *o* verso l'alto. Ed influisce tanto più, perchè durante la costruzione col metodo descritto, i tre vettori appaiono come tre linee più chiare dello sfondo, linee che tuttavia subiscono oscillazioni. Tale fatto è stato osservato non soltanto da me, ma anche dal Prof. Kiesow, che eseguì alcune di queste esperienze, come pure da altri soggetti, che ebbi occasione di esaminare.

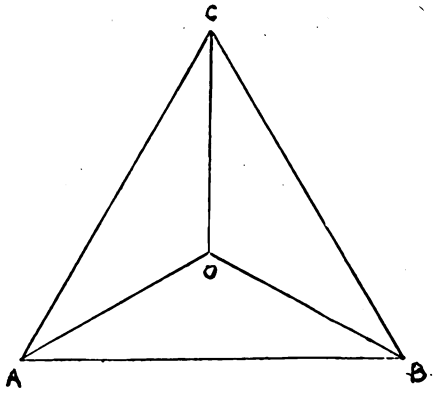

Fig. 2

Entra in giuoco tuttavia ancora un'altra illusione di effetto contrario alla descritta. Oltre dai vertici, dista il centro di un triangolo in modo eguale anche dai punti medi dei lati. Questi tre vettori si presentano pure come linee soggettive ed il vettore verticale appare più lungo di quelli obliqui (*fig. 3*).

Nella costruzione del centro questa illusione tende a fare spostare il centro verso il basso, ed in misura maggiore quanto più verso l'alto lo si è spostato, volendo eguagliare le tre distanze dai vertici. Confrontando le due figure *2* e *3* si può osservare l'influenza

Digitized by Google

delle dette illusioni. In fig. *2* il centro *O* appare spostato in basso ed *OC* notevolmente maggiore di *OA* ed *OB*. Anche in fig. *3* esso appare spostato in basso, ma di meno che in fig. *2*: *OD* sembra più lungo di *OE* ed *OF*, e più ancora confrontando questa linea con la stessa distanza della fig. *2*. La illusione di Müller-Lyer e quella che spazi

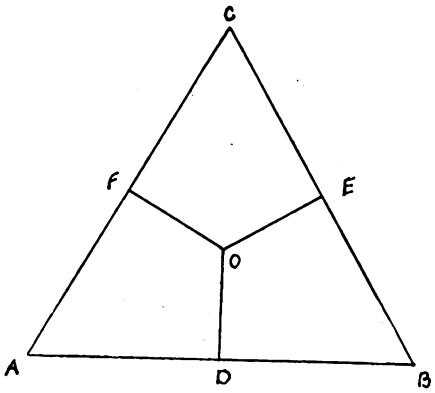

Fig. 3

pieni appaiono maggiori dei vuoti hanno qui speciale importanza. L'influenza che questi fenomeni esercitano sulla determinazione del centro, è così forte che si proiettano sulla figura le corrispondenti linee soggettive più chiare dello sfondo. Riguardo alla determinazione del centro, uno di questi fenomeni agisce in senso contrario all'altro: quanto più si cerca di eguagliare i vettori della fig. *2*, tanto più aumenta la diseguaglianza fra i vettori della fig. *3*.

Queste due cause di errore di opposto effetto producono un vero disturbo nella coscienza del soggetto, disturbo che si manifesta con un sentimento di dispiacere e che segue le oscillazioni dell'attenzione verso l'una o l'altra illusione. Avviene una vera gara fra le due rappresentazioni: del triangolo col centro equidistante dai vertici e del triangolo col centro equidistante dai punti medii dei lati. S'impone tuttavia la prima a cui è legata l'illusione più appariscente. Anzi, in talune determinazioni l'imporsi di essa ha per effetto che si va al di là di quel che comporterebbe l'illusione stessa. La rappresentazione invece del centro equidistante dai punti medii dei lati diminuisce l'errore verso l'alto. Ciò avviene specialmente

Digitized by Google

nelle determinazioni eseguite con spostamenti dal basso verso l'alto. Così, mentre nei triangoli di *50, 60, 90* e *100* mm. di lato *k* è positivo, manifestando l'azione della prima rappresentazione, negli altri invece la seconda rappresentazione ha maggiore influenza, e *k* risulta negativo.

Queste oscillazioni, dovute alla gara suddetta, sono manifeste nella fig. *4*, dove sulla linea d'ascissa sono portate, alla distanza di 15 mm., le grandezze dei lati nella loro successione; le corrispondenti ordinate rappresentano i valori di *F*, ridotti alla prima cifra decimale, per modo che ad ogni decimo del valore così arrotondato corrispondono due mm. La linea piena rappresenta l'andamento degli errori ottenuti sperimentalmente, la linea punteggiata quello degli errori ricavati per mezzo del calcolo. Si vede chiaramente che le deviazioni avvengono con oscillazioni ora al di sopra ora al di sotto della linea piena. Anche questa figura venne ridotta a due terzi.

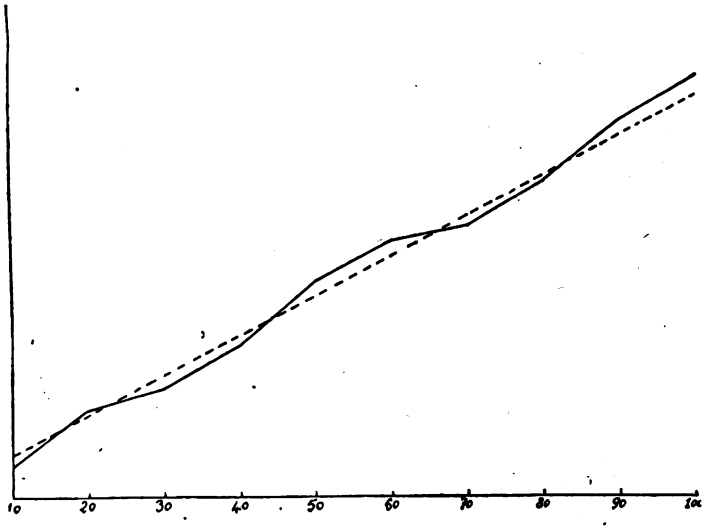

Fig. 4

Tenuto conto di quanto fu detto, si comprende come la curva degli errori relativi ai lati *(fig. 1)* presenti dei minimi in corrispondenza dei triangoli di *10, 30, 70* e *80* mm. di lato, e dei massimi in corrispondenza di *20, 50* e *60, 90* e *100 mm.;* massimi e minimi che si alternano quasi simmetricamente.

Digitized by Google

Risultati ottenuti nei quadrati. - Anche nei quadrati l'errore vien commesso verso l'alto; talvolta esso è spostato verso destra, non mai a sinistra o in basso.

Nella tabella IV sono esposti i risultati ottenuti nelle dieci determinazioni per i dieci quadrati da *10* a *100* mm. di lato.

TABELLA IV.

Determinazioni	*10* mm.	*20* mm.	*30* mm.	*40* mm.	*50* mm.	*60* mm.	*70* mm.	*80* mm.	*90* mm.	*100* mm.
I	—	—	0,40	0,50	1,00	0,75	1,25	1,75	1,75	1,50
II	—	—	0,60	0,75	1,00	1,00	1,25	1,40	1,90	2,40
III	—	0,20	0,75	0,90	1,00	1,60	1,50	1,90	2,00	2,00
IV	—	—	0,40	1,00	1,20	1,75	1,00	1,50	2,20	2,50
V	—	—	0,75	0,90	1,20	1,40	1,75	1,50	1,75	2,60
VI	—	—	0,20	1,00	1,20	1,50	1,50	1,80	1,75	2,00
VII	—	—	0,40	0,75	0,90	1,75	1,50	1,70	1,50	2,75
VIII	—	—	0,50	0,50	1,10	1,50	1,60	2,00	2,00	2,00
IX	—	0,25	0,25	0,60	0,75	1,40	1,50	2,00	2,10	1,50
X	—	0,25	0,50	0,75	0,75	0,75	1.50	1,50	2,00	2,50

Nella tabella V sono indicati invece i valori di *Fo*, *Fu*, *F*, $\triangle m$, *w* e $\frac{F}{l}$, (per i quadrati da 30 a 100 mm. di lato), calcolati nel modo detto pei triangoli.

L'errore commesso per i quadrati di 10 e 20 mm. di lato è inferiore all'errore inerente al metodo stesso, errore che dalle variazioni medie si può dedurre essere circa *0,2* mm. Per ciò non tenni calcolo neppure dei tre errori indicati nella tabella IV per il quadrato di 20 mm. di lato. *Fo* è generalmente superiore ad *Fu;* per i quadrati di *60, 70, 80* mm. di lato però avviene il contrario.

L'errore medio variabile e l'errore probabile presentano valori inferiori ai corrispondenti valori trovati pei triangoli.

Anche in queste determinazioni *F* aumenta proporzionalmente alla lunghezza dei lati; quindi anche qui l'errore relativo si avvia ad una costante, secondo la media aritmetica uguale ad $\frac{1}{50}$ circa.

L'andamento delle curve che rappresentano l'errore costante e l'errore relativo, pur conservando il carattere della proporzionalità,

Digitized by Google

TABELLA V.

Figura presentata	*Fo*	*Fu*	*F*	$\triangle m$	*w*	$\frac{F}{l}$	$\frac{F}{l}$
Quadrato 30 mm.	0,5800	0,3700	0,4750	0,1528	0,03962	0,01583	$\frac{1}{63,16}$
Quadrato 40 mm.	0,8100	0,7200	0,7650	0,1560	0,04044	0,019125	$\frac{1}{52,29}$
Quadrato 50 mm.	1,08	0,94	1,01	0,1391	0,03607	0,0202	$\frac{1}{49,50}$
Quadrato 60 mm.	1,30	1,98	1,34	0,3204	0,08306	0,02233	$\frac{1}{44,78}$
Quadrato 70 mm.	1,35	1,52	1,435	0,1697	0,04399	0,02050	$\frac{1}{48,72}$
Quadrato 80 mm.	1,61	1,80	1,705	0,195	0,05054	0,02131	$\frac{1}{46,92}$
Quadrato 90 mm.	1,92	1,87	1,895	0,175	0,04536	0,02106	$\frac{1}{47,49}$
Quadrato 100 mm.	2,20	2,15	2,175	0,3953	0,1025	0,02175	$\frac{1}{45,98}$

è diverso da quello delle corrispondenti curve dei triangoli. La figura *5* rappresenta l'andamento dell'errore costante nelle serie dei quadrati da *30* a *100* mm. di lato. Come per i triangoli così anche qui sulla linea dell'ascissa vennero portate le grandezze dei lati nella loro successione alla distanza di 15 mm., e sulle ordinate i valori di *F*, ridotti

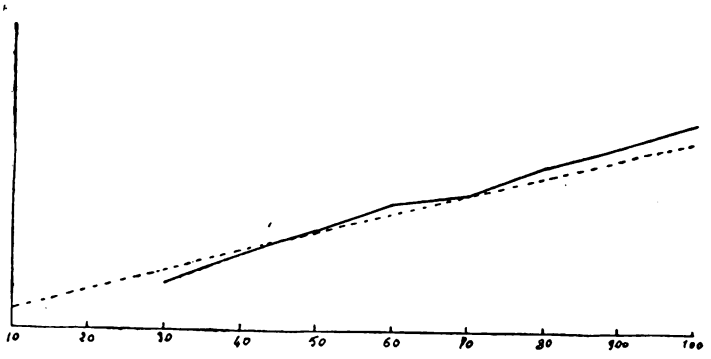

Fig. 5

Digitized by Google

alla prima cifra decimale, per modo che ad ogni decimo del valore così ottenuto corrispondono 2 mm. (1). Eseguiti i calcoli, come per i triangoli, trovato cioè il valore di F per il quadrato di 1 mm. di lato, facendo la media degli errori relativi, e da questo valore ricavati quelli che avrebbero dovuto avere i singoli F, se avessero seguito rigorosamente la legge di proporzionalità, potei costruire la linea punteggiata che rappresenta i valori di F ottenuti col calcolo, mentre la linea piena indica i corrispondenti valori ottenuti sperimentalmente. Poichè la media dei $\frac{F}{l}$ è eguale a *0,02*, ogni valore di F è dato da: $(0{,}02\ n) \pm k$, dove n è la grandezza del lato e k corrispondente a quanto fu detto sopra (cfr. *Tabella VI)*.

TABELLA VI.

Lati dei quadrati	*F ottenuto col calcolo*	*E ottenuto speriment.*	*k*
30 mm.	0,60	0,475	— 0,125
40 »	0,80	0,765	— 0,035
50 »	1,00	1,010	— 0,010
60 »	1,20	1,340	+ 0,140
70 »	1,40	1,435	+ 0,036
80 »	1,60	1,705	+ 0,105
90 »	1,80	1,895	+ 0,095
100 »	2,00	2,175	+ 0,175

Dai valori di k e dalla curva della fig. *5* si vede chiaramente come l'errore costante tende ad aumentare con la grandezza dei quadrati più di quanto dovrebbe essere secondo il principio della proporzionalità. Nei triangoli invece abbiamo oscillazioni ora al disopra ora al disotto, vale a dire il valore di F è ora minore ora maggiore di quel che comporti la proporzionalità coi lati.

(1) Anche questa figura venne ridotta a due terzi.

Digitized by Google

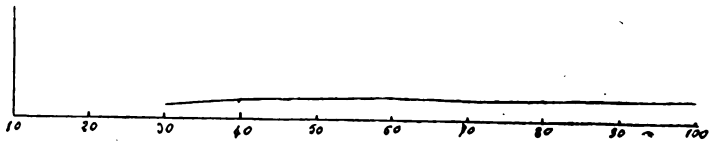

Fig. 6

La fig. *6* rappresenta l'andamento dell'errore relativo. Mentre sull'ascissa sono portate le grandezze dei lati, sulle ordinate sono segnati i valori di $\frac{F}{l}$ (ridotti alla seconda cifra decimale): ad ogni unità del secondo ordine corrispondono due millimetri. Anche qui vediamo come l'errore relativo aumenta progressivamente da *30 a 50* mm. di lato, per poi seguire un valore costante. La figura venne ridotta a due terzi.

Da questi fatti si può dedurre, mi pare, che, mentre nei triangoli la determinazione del centro va soggetta a due cause d'errore di segno contrario fra di loro, ma di cui l'una è maggiore dell'altra, nei quadrati vi è una sola causa d'errore, la quale nelle figure minori influisce meno che non in quelle maggiori.

Questa causa d'errore va attribuita anzitutto alla nota illusione, secondo la quale i lati verticali di un quadrato appaiono maggiori che non gli orizzontali. Ed inoltre, siccome nella determinazione del centro si costruiscono soggettivamente le distanze che uniscono il centro coi vertici e con le metà dei lati, con linee più chiare dello sfondo, la causa per cui il centro viene spostato verso l'alto mi pare sia riposta nella cosidetta illusione della croce (1).

Quando osserviamo due segmenti uguali perpendicolari fra di loro ed intersecantisi nei punti medii, troviamo che il segmento verticale appare più lungo di quello orizzontale, che la metà superiore del segmento verticale appare maggiore di quella inferiore, e che, se si osserva monocularmente, la metà esterna del segmento orizzontale appare maggiore della metà interna. Costruendo soggettivamente le diagonali di un quadrato, ha influenza la prima illusione. Infatti, apparendo il quadrato come rettangolo, le diagonali soggettive si intersecheranno in un punto situato al di sopra del centro. Se si costruisce invece la croce partendo dal centro (questo è il caso più frequente), influisce la seconda illusione: nel determinare la metà del segmento verticale la si sottoapprezza, poichè la parte superiore appare maggiore della inferiore. Siccome infine le osservazioni avvenivano

(1) W. WUNDT. *Die geometrisch-optischen Täuschungen, Abhandlungen* di Lipsia, mathem. phys. Classe, XXIV, 2, pp. 106 (54) e segg. 1898.

Digitized by Google

monocularmente, e precisamente con l' occhio destro, il segmento destro della croce doveva apparire maggiore del sinistro e conseguentemente il centro spostato a destra. Ciò tuttavia si verificò soltanto alcune volte.

Si verifica anche nelle mie ricerche il fatto ricordato da Wundt che « al di qua di una lunghezza di circa 10 mm. per ogni braccio della croce, la illusione diminuisce » (1). L'errore nell'apprezzamento del centro, legato all'entità di detta illusione, diminuisce, più che per gli altri quadrati, dal quadrato di 40 mm. a quello di 10 mm. di lato. Ciò si vede chiaramente in fig. *6*, dove la curva degli errori costanti, partendo da un punto situato attorno a *40* mm. di lato, s'abbassa rapidamente verso *10* mm.

Risultati ottenuti nei cerchi. - Nella determinazione del centro dei cerchi non si può parlare di un vero errore costante. Nella tabella VII sono dati, come esempio, i risultati ottenuti in cinque serie di dieci determinazioni, con cerchi di rispettivamente *20, 40, 60, 80, 100 mm.* di raggio. Anche qui le prime cinque determinazioni vennero eseguite con spostamenti dall'alto al basso e le ultime in senso contrario. Accanto ad ogni determinazione è data la direzione dell'errore, considerata rispetto all'osservatore.

TABELLA VII.

Determinazioni	*20 mm.*		*40 mm.*		*60 mm.*		*80 mm.*		*100 mm.*	
	Errore	*Direz. errore*	*Errore*	*Direz. errore*	*Errore*	*Direz. errore*	*Errore*	*Direz. errore*	*Errore*	*Direz. errore*
I	0,00	—	0,75	basso	0,50	basso	0,00	—	0,50	basso
II	0,00	—	0,00	—	0,50	basso	0,50	destra	0,50	basso
III	0,00	—	0,75	basso	0,75	sinist.	0,25	basso	0,75	sinist.
IV	0,25	alto	0,00	—	0,00	—	0,00	—	0,00	—
V	0,25	basso	0,00	—	0,50	destra	0,25	sinist.	0,50	alto
VI	0,25	basso	0,00	—	0,00	—	0,25	basso	0,00	—
VII	0,25	basso	0,75	alto	0,00	—	0,00	—	0,00	—
VIII	0,00	—	0,00	—	0,00	—	0,00	—	0,00	—
IX	0,25	alto	0,00	—	0,00	—	0,40	basso	0,00	—
X	0,00	—	0,00	—	0,50	alto	0,50	alto	0,50	alto

(1) W. WUNDT, *op. cit.*, p. 107 (55).

Digitized by Google

Si vede chiaramente che, in verità, non si può parlare di errore costante e che i piccoli errori commessi sono dovuti a cause accidentali. Ricordo che il Prof. Kiesow, avendo sperimentato sulla serie intera dei 5 cerchi, commise un errore per ognuno di essi uguale a 0,5 mm.

Nella determinazione del centro il sentimento estetico è predominante. Basta un lieve spostamento, affinchè nasca un sentimento di dispiacere. Si è guidati piuttosto da questo fatto, che non dal confronto di distanze, come per i quadrati e specialmente per i triangoli.

Sono del parere che la mancanza di errore costante nella determinazione del centro dei cerchi sia dovuta al fatto che nel cerchio non si ha l'illusione della verticale. Wundt (1) infatti dice: « So ist es eine bemerkenswerthe Tatsache, dass die constanten Täuschungen und vor allem die stärkste derselben, die scheinbare Ungleichheit gleicher verticaler und horizontaler Strecken, zwar an allen von geraden Linien umschlossenen oder von geradlinigen Durchmessern durchkreuzten Figuren hervortritt, dass aber am Kreise keine Spur derselben bemerkbar ist ».

Questa è altresì una prova che l'errore commesso nel triangoli e nei quadrati è dovuto ad illusioni ottiche legate alle speciali peculiarità di dette figure, perchè, ove manchi l'illusione, vien meno ogni errore.

Influenza del sentimento estetico. - Alla figura centrata si accompagna un sentimento di forma (Gestaltgefühl) (2), che si manifesta come sentimento di piacere, quando il centro si trova in quella posizione, che appare soggettivamente esatta.

Ho osservato a tale proposito che, mentre nei triangoli il sentimento estetico di piacere non è rilevante, nei quadrati e specialmente nei cerchi la influenza di esso non è trascurabile.

Siccome per l'ordinamento delle esperienze si passa gradualmente e successivamente da una posizione del centro all'altra, ad ognuna delle rappresentazioni prodottesi si accompagna un sentimento estetico, il quale è di piacere, quando si giunge alla posizione soggettivamente esatta del centro. Nei cerchi poi esso è così intenso che si è guidati piú da questo criterio che non da altri.

(1) W. WUNDT. *Die geometrisch - optischen Täuschungen, ecc.* pp. 112 (60) e seg.

(2) W. WUNDT. *Grundzüge, ecc.*, III6, pp. 134 e segg.

Digitized by Google

Ciò avviene con minor frequenza nei quadrati, di rado invece nei triangoli.

Il fatto mi venne confermato pure da altri soggetti coi quali feci alcune esperienze. Degna di nota però è la differenza a questo proposito fra i vari soggetti.

Il soggetto M. C. (Torino), ad esempio, finita la determinazione, non sapeva dire se la rappresentazione della figura centrata le procurava un sentimento di piacere. Il Prof. Kiesow invece provava un sentimento di piacere soltanto pei cerchi. Nel soggetto T. C. (Torino) la determinazione in tutte le figure s' accompagnava con un sentimento estetico di piacere. Così pure in me.

Costanza dell'errore relativo. - Il risultato maggiore della presente ricerca è la costanza dell' errore relativo nella determinazione del centro tanto nei triangoli, quanto nei quadrati. Questa costanza si può ammettere, in base ai miei risultati, in media uguale a $\frac{1}{50}$ circa nei quadrati ed a $\frac{1}{25}$ circa nei triangoli (1). Essa palesa una legge di proporzionalità, simile a quanto esige la legge di Weber.

Ma si tratta qui veramente della legge di Weber? In questa legge si tratta del rapporto che esiste tra l' intensità dello stimolo e la sensazione; nel caso mio invece lo stimolo è una figura soggetta ad illusioni ottiche, dalle quali dipende la percezione della figura centrata soggettivamente esatta. Si tratta di un rapporto fra i risultati di due processi che vanno al di là della semplice sensazione.

Siccome tuttavia l'entità dell'illusione ottica è legata alla grandezza della figura presentata, mi pare che la costanza dell' errore relativo si possa considerare come un caso analogo ai fatti espressi dalla legge di Weber, caso che dimostra vieppiù, come questa legge sia una legge di relatività psichica, dipendente da fattori psichici e non da dati fisiologici.

Casi in cui vien diminuito l'errore nell'apprezzamento del centro. - Quando osserviamo il vero centro geometrico di un quadrato, esso ci appare come tale (2), per quanto dalle ricerche antecedenti si

(1) Sperimentando col soggetto T. C. (Torino) per mezzo di triangoli, ottenni in tre serie complete una costanza media di *0,08*. L'esiguo numero delle determinazioni però non permette di attribuire a questo risultato un valore definitivo.

(2) TH. LIPPS. *Raumaesthetik und geometrisch-optische Täuschungen*, p. 109, 1897.

Digitized by Google

dedurrebbe che dovessimo vederlo spostato in basso. Tuttavia, osservando con attenzione, ci si accorge che la metà superiore del quadrato appare maggiore della inferiore.

Quest'ultima illusione scompare completamente, quando al quadrato si circonscrive o si inscrive un cerchio, e si osserva il quadrato coi lati rispettivamente verticali ed orizzontali.

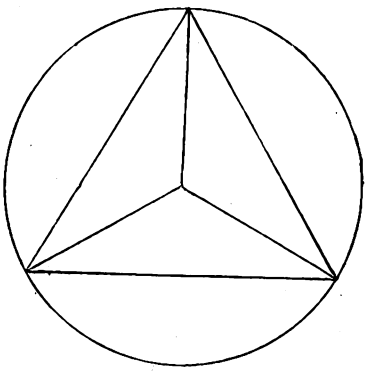

Fig. 7

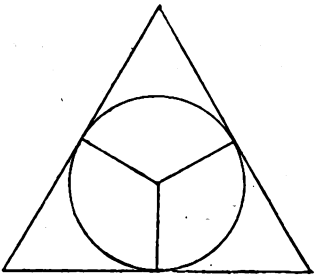

Fig. 8

Non così avviene nel triangolo. Sia che noi circoscriviamo od inscriviamo al triangolo un cerchio, il centro geometrico del triangolo appare spostato in basso. È interessante notare che il centro appare come tale nel cerchio in figura 7, pure apparendo disuguali i raggi, mentre in figura 8, esso sembra spostato in alto pel cerchio, alquanto in basso per il triangolo. Si confrontino a tal riguardo le figg. 7 e 8. In tutti e due i casi l'illusione del triangolo permane, per quanto minore in fig. 7. L' esame tuttavia di queste figure, in cui si complicano le cause delle illusione, sarà argomento di un mio prossimo articolo (1).

Prima di deporre la penna, sento il dovere di ringraziare sinceramente il mio Maestro, Prof. Kiesow, che mi fu largo di consigli e nel cui Istituto di Torino iniziai la presente ricerca. Ringrazio pure il Prof. P. Gemelli dell'interesse, col quale volle seguirla.

(1) Faccio notare che in fig. 8, dei tre settori in cui è diviso il cerchio, il superiore appare notevolmente minore dei laterali.

Digitized by Google